EXPÉRIENCES

SUR DIVERS CAS DE LA CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE, ET REMARQUE SUR LA MANIÈRE D'AVOIR ÉGARD À LA CONTRACTION DANS LE CALCUL DE LA DÉPENSE DES ORIFICES.

PAR GEORGE BIDONE

TURIN

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin
Tom. XXVII.

EXPÉRIENCES

SUR DIVERS CAS DE LA CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE, ET REMARQUE SUR LA MANIÈRE D'AVOIR ÉGARD À LA CONTRACTION DANS LE CALCUL DE LA DÉPENSE DES ORIFICES.

PAR GEORGE BIDONE.

Lu dans la séance du 21 avril 1822.

Dans ces expériences j'ai considéré en premier lieu la contraction de la veine qui sort par des orifices rectangulaires : lorsque l'écoulement se fait par des orifices quarrés ou circulaires, percés en minces parois, la quantité de la contraction est parfaitement connue et déterminée, et toutes les expériences sont d'accord sur sa valeur. Mais l'on a revoqué en doute l'exactitude de l'emploi de cette même valeur dans l'écoulement par des orifices rectangulaires, dont les côtés sont inégaux entr'eux, parceque les expériences faites avec des orifices circulaires et quarrés, ne prouvent pas que la contraction demeure la même quelle que soit la figure de l'orifice (*). À la vérité M. HACHETTE,

(*) *Del movimento e della misura delle acque correnti, di Antonio Tadini. Milano* 1816 pag. 182 et 250.

d'après une belle suite d'expériences qu'il a faites dernièrement sur l'écoulement des fluides, a conclu que la forme de l'orifice en minces parois n'influe pas d'une manière sensible sur la dépense (*). Mais on ne voit pas, du moins par les rapports imprimés, faits à l'Académie des Sciences de Paris sur ces expériences, que M. Hachette ait vérifié cette proposition sur des orifices rectangulaires, dont la largeur soit fort-grande en comparaison de la hauteur (**).

Je me suis donc proposé de chercher directement par l'expérience la contraction relative à ces orifices, dont l'usage est très-fréquent dans les grandes distributions des eaux courantes. Pour cela j'ai employé des orifices rectangulaires, percés dans de minces parois, et par lesquels l'eau s'écoulait librement dans l'air. La hauteur de ces orifices était la même pour tous; mais la largeur augmentait d'un orifice à l'autre, jusqu'à devenir seize fois plus grande que la hauteur. Le résultat de ces expériences est que jusqu'à cette limite la valeur du coëfficient de la contraction est sensiblement constante, et la même que celle des orifices quarrés et circulaires.

Il y a un autre cas assez étendu sur lequel on n'a pas

(*) Annales de Chimie et de Physique tom. 3.e (1816) pag. 80.

(**) Rapport de MM. Ampère, Girard et Poisson. (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France année 1816 tom. 1.er pag. XXXVI). Rapport de MM. Poisson, Ampère et Cauchy. (Annales de Chimie et de Physique tom. 3.e (1816) pag. 78).

fait, que je sache, d'expériences directes et telles qu'on en puisse conclure avec précision la contraction dont il s'agit. Ce cas est relatif aux orifices, pour lesquels la contraction n'a lieu que sur une partie de leur périmètre. L'on a reconnu depuis long-tems que la manière dont le fluide parvient à l'orifice, a une influence essentielle sur la quantité de la contraction; et M. De Prony a remarqué que la situation de l'orifice par rapport aux parois du vase doit certainement influer sur la contraction de la veine (*). Or en détruisant la contraction sur une partie du périmètre de l'orifice, il est visible que l'on change la manière dont l'eau parvient à l'orifice, et que la situation de celui-ci par rapport aux parois que l'eau doit suivre pou y parvenir, n'est plus dans les mêmes circonstances, que lorsque la contraction se fait sur tout le périmètre.

D'après ces considérations les auteurs qui ont parlé des orifices dont il est question ici, admettent que la contraction totale diminue lorsqu'elle n'a pas lieu sur tout le périmètre de l'orifice; mais ils ne sont pas d'accord sur la manière d'évaluer cette diminution: car les uns ne proposent à cet égard aucune règle déterminée, ne croyant pas que l'on puisse, au moins d'après nos connaissances actuelles, établir rien de certain sur cet objet sans l'appui de

---

(*) Nouvelle Architecture Hydraulique par M. De Prony. Paris 1790 tom. 1.er n.o 832.

l'expérience (*) : d'autres supposent que le déchet de la dépense pour un orifice où la contraction est détruite sur une partie de son périmètre, doit être exprimé par le déchet total, relatif aux orifices percés en minces parois, multiplié par le rapport de la partie du périmètre sur laquelle la contraction a lieu, au périmètre total de l'orifice (**).

J'ai donc cru qu'il ne serait pas inutile ni pour l'exactitude des applications, ni pour le progrès de la théorie elle-même, de faire des expériences propres à donner la valeur de la contraction relative à ce cas. Pour cela je me suis servi d'orifices quarrés, préparés de manière que la contraction pouvait avoir lieu sur trois côtés, sur deux, ou sur un seulement. Ces orifices étaient d'ailleurs, par rapport aux côtés sur lesquels la contraction avait lieu; dans les mêmes circonstances que les orifices percés en minces parois, et l'eau s'écoulait librement dans l'air.

Il résulte de ces expériences qu'il y a une diminution sensible dans la contraction, lorsqu'elle n'a pas lieu sur tout le périmètre de l'orifice, et que cette diminution devient plus considérable à mesure que la partie du périmètre sur laquelle la contraction n'a pas lieu, est plus grande:

(*) *Elementi di Meccanica e d'Idraulica di Giuseppe Venturoli. Milano* 1818 tom. 2.e n.o 359.

(**) *Del movimento e della misura delle acque correnti, di Antonio Tadini. Milano* 1816 pag. 224.

partant la valeur du coëfficient de la contraction augmente à mesure que la contraction a lieu sur une moindre partie du périmètre.

Cette augmentation est telle, qu'en prenant le nombre 0,6190 pour la valeur du coëfficient de la contraction, lorsqu'elle se fait sur tous les côtés d'un orifice percé dans une mince paroi, ce coëfficient devient 0,6389; 0,6567; 0,6943, lorsque la contraction n'a lieu que sur trois côtés, sur deux ou sur un seulement, l'orifice étant quarré, et percé en mince paroi par rapport aux côtés, sur lesquels la contraction a lieu. De ces résultats il est facile de voir que le déchet de la dépense des orifices dont il s'agit, est beaucoup plus grand que celui qu'on obtient d'après la supposition rapportée plus haut.

Les expériences dont j'ai l'honneur de rendre compte à la Classe dans ce Mémoire, ont été faites dans le mois d'octobre dernier. Chaque expérience a été répétée plusieurs fois et dans des jours différens. Tous les élémens ont été pris avec le plus grand soin, et particulièrement les aires et les côtés des orifices ont été déterminés et mesurés avec des moyens très-précis, en poussant aussi loin qu'il a été possible, l'exactitude dans la mesure de ces quantités.

Les dimensions des orifices que j'ai employés, sont toutes plus grandes que les limites pour lesquelles M. Hachette a reconnu que la contraction est exempte des irrégularités, qui ont lieu pour des orifices de moindres dimensions (*).

(*) Annales de Chimie et de Physique tom. 3.e (1816) pag. 80.

Ainsi ces expériences sont assez en grand soit par rapport aux orifices, soit par rapport aux charges d'eaux, et à la durée de l'écoulement, pour que l'on puisse compter sur la généralité des résultats. On trouve en effet des expériences semblables sur les écoulemens, et même pas si en grand, faites par Bossut, et par d'autres Auteurs, et les résultats qu'ils en ont obtenus, sont conformes à ceux donnés par des expériences exécutées avec de charges d'eau et d'orifices plus grands. Et à cet égard l'on sçait que quoique on apperçoive quelque légère différence dans la valeur de la contraction lorsque la charge d'eau augmente, cette différence n'est pas assez sensible, ni connue dans sa marche pour que l'on puisse en tenir compte dans le coëfficient de la contraction à mesure que la hauteur de la charge d'eau vient à changer.

Le dernier paragraphe de ce mémoire contient une remarque sur la manière d'introduire le coëfficient de la contraction dans le calcul de la dépense des orifices. Lorsque l'orifice est horizontal, la manière ordinaire de corriger la dépense théorique, en la multipliant par le coëfficient de la contraction, est exacte: elle est encore bonne lorsque, l'orifice étant vertical, la charge d'eau est plusieurs fois plus grande que la hauteur de l'orifice. Mais dans les écoulemens par des orifices verticaux, où la charge d'eau est moindre que le double ou le triple de la hauteur de l'orifice, la manière précédente de corriger la dépense théorique n'est pas exacte, et les dépenses ainsi calculées sont, dans certains

cas, sensiblement différentes des véritables. La cause en est, que pour les orifices verticaux il faut introduire les quantités relatives à la contraction dans l'élément différentiel de la dépense, et avoir égard à ces mêmes quantités dans les limites de l'intégration. En opérant ainsi, l'expression analytique de la dépense qu'on obtient, est différente de l'expression ordinaire, et l'une ne peut coïncider avec l'autre que dans le cas où la charge d'eau est très-grande par rapport à la hauteur de l'orifice.

§. I.

Appareil et procédé avec lesquels ces expériences ont été faites.

1. Le reservoir dont je me suis servi pour faire ces expériences, est une caisse rectangulaire, formée avec des madriers d'environ deux pouces d'épaisseur. Sa longueur (fig. 1) est de 2. 11. 11 (*pied. pouc. lign.*); sa largeur ainsi que sa hauteur est de 2 pieds, toutes ces dimensions étant prises en dedans, et rapportées au pied de Paris que l'on prend pour l'unité de mesure. Le fond et les quatre parois verticales étaient chacune d'une seule pièce, bien polie et bien dressée. L'assemblage a été exécuté avec beaucoup de précision et de solidité de sorte qu'il ne s'échappait point d'eau par les joints, et que les dimensions de la caisse n'ont éprouvé aucune altération sensible pendant le cours de ces expériences.

2. Dans une des parois de la caisse j'ai fait pratiquer une ouverture rectangulaire, évasée au déhors. La base de cette ouverture était élevée au-dessus du fond intérieur de la caisse de 17 lignes : la hauteur de l'ouverture était de 4.pouc. et 6.lign. sa largeur de 9.pouc. 2.lign. Dans l'intérieur de la caisse, et sur la face de la même paroi on a adapté deux coulisses verticales, une de chaque côté de l'ouverture précédente : ces coulisses étaient destinées à recevoir la pièce qui portait l'orifice, avec lequel on voulait faire l'expérience.

3. Chaque orifice (fig. 2) était percé dans une large plaque de cuivre bien dressée, de l'épaisseur d'une demi-ligne. Cette plaque était adaptée d'une manière fixe et invariable à une pièce rectangulaire de bois, épaisse et solide et bien dressée, qui avait elle-même une large ouverture, évasée au déhors, au milieu de laquelle répondait l'orifice percé dans la plaque de cuivre. Cette pièce de bois, garnie d'un manche, entrait dans les coulisses dont on a parlé dans le n.° précédent. Lorsque cette pièce était à sa place, elle touchait par sa base le fond du reservoir, et par une de ces faces la paroi de la caisse, en présentant à l'intérieur l'autre face sur laquelle était adaptée la plaque de cuivre, le plan de cette face étant parfaitement uni et vertical, et très-étendu en tous sens par rapport à l'orifice, de sorte que celui-ci qui était au milieu de ce plan, se trouvait à l'égard de l'écoulement de l'eau, dans

les mêmes circonstances que les orifices que l'on nomme en minces parois.

4. L'orifice étant à sa place, et après avoir employé les moyens propres pour empêcher toute issue à l'eau, hormis que par l'orifice, on disposait la caisse de manière que le plan de son fond fût horizontal. Ensuite dans la face intérieure de la paroi du reservoir, opposée à l'orifice, et sur une ligne verticale qu'on y avait tracé, on fixait deux épingles perpendiculairement à cette face, l'une près du fond et l'autre à une plus grande hauteur. La position de ces épingles, par rapport au fond et à l'orifice, était connue par la mesure immédiate. Après cela on bouchait l'orifice par le moyen d'un tampon de liege, et l'on remplissait d'eau la caisse pour toute sa hauteur, et l'on donnait à l'eau le temps de se calmer parfaitement.

5. Dès que l'eau était calme, on ouvrait l'orifice, et l'on en nettoyait les bords, en les examinant avec soin pour voir si rien ne s'y était attaché : l'on s'assurait ainsi que la veine touchait partout, en sortant, les arêtes intérieures de l'orifice. Pendant ce temps l'écoulement s'établissait, et la surface de l'eau s'abaissait. Lorsqu'elle était à quelque distance de l'épingle supérieure, une personne, exercée à ce genre d'observations, suivait attentivement l'abaissement de la surface de l'eau, et donnait le signal à l'instant que cette épingle venait à se découvrir. Je notais cet instant avec une montre à secondes, vérifiée et bien reglée. La surface de l'eau s'abaissant toujours, la

même personne donnait le signal à l'instant que l'épingle inférieure se découvrait: je notais cet instant et l'expérience était achevée. Après cela si on voulait répéter la même expérience, on bouchait l'orifice, et l'on remplissait de nouveau la caisse : ou bien si l'on voulait faire une expérience semblable avec un autre orifice, on laissait vuider la caisse, et l'on remplacait l'orifice par celui qu'on s'était proposé. La durée de chaque expérience, c'est-à-dire le temps de l'écoulement depuis l'épingle supérieure jusqu'à l'épingle inférieure, étant assez long, on examinait de nouveau, pendant ce temps, les bords de l'orifice et la veine pour s'assurer que rien n'altérait l'écoulement.

6. D'après cela on avait par la mesure directe et immédiate toutes les données relatives à l'écoulement dans chaque expérience, à l'exception de la contraction de la veine, qui était l'inconnue qu'il s'agissait de chercher par ces expériences: ainsi pour en déduire l'aire de la section de la veine contractée, ou, plus simplement, le coëfficient de la contraction, il est clair qu'il faut se servir des formules relatives à l'écoulement des vases prismatiques, qui se vuident sans recevoir de nouvelle eau. Et puisque dans ces expériences les aires des orifices sont toutes extrêmement petites comparativement à l'aire de la section du reservoir; et que de plus la hauteur de chaque orifice est aussi très-petite par rapport à la charge d'eau, soit au commencement, soit à la fin de l'expérience; et qu'enfin l'écoulement se fait librement dans l'air, on prendra les

formules relatives à ces circonstances, c'est-à-dire à celles de l'écoulement libre par un orifice très-petit par rapport à la section du vase et tel que tous ses points sont censés à la même distance de la surface de l'eau, cette distance étant prise depuis le milieu de la hauteur de l'orifice.

7. En posant donc les dénominations suivantes,

m^2, l'aire de la section horizontale du reservoir;

k^2, l'aire de l'orifice;

a, la hauteur de l'eau au-dessus du centre de l'orifice, au commencement du temps t;

t, le temps de l'écoulement, exprimé en secondes;

b, la hauteur de l'eau au-dessus du centre de l'orifice, à la fin du temps t;

μ, le coëfficient de la contraction de la veine;

Q, le volume de l'eau écoulée pendant le temps t;

g, la gravité terrestre $=30,^{pied.}1957875$;

on aura ces équations (*)

$$Q=(a-b)\,m^2;$$

$$Q=\mu\,k^2\,t\sqrt{2ga}-\frac{g\mu^2k^4t^2}{2m^2};$$

d'où l'on tire

$$(1)\qquad \mu=\frac{2m^2}{k^2t\sqrt{2g}}(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

(*) *Elementi di Meccanica e d' Idraulica di Giuseppe Venturoli. Milano* 1818 tom. 2.e pag. 74-75.

Nouvelle Architecture Hydraulique par M. De Prony tom. 1.er n.° 733.

Cette équation donnera la valeur de μ, lorsque celles de a, b, m, k et t seront connues.

§. II.

Expériences avec des orifices verticaux et rectangulaires, percés en minces parois.

8. Les expériences que je rapporte dans ce paragraphe, ont été faites avec des orifices rectangulaires et verticaux. La hauteur de ces orifices était constante, savoir de 4 lignes, à quelque petite fraction près, dont on tiendra compte dans chaque cas particulier : mais la base variait d'un orifice à l'autre, jusqu'à devenir seize fois plus grande que la hauteur. Les orifices étaient d'ailleurs tous percés en minces parois, et l'écoulement se faisait librement dans l'air. Pour toutes ces expériences l'on a . . . . $m^2 = 124128^{\text{lign. quar.}}$; ainsi l'équation (1) du n.° 7 deviendra

$$(2) \qquad \mu = \frac{(2662,26065)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{k^2 t},$$

où a, b et k doivent être exprimés en lignes. De cette équation on tirera la valeur de μ, en y substituant celles de a, b, k et t, données dans chaque expérience.

9. *Expériences faites avec un orifice rectangulaire et vertical, percé en mince paroi, dont la base est de* $8,15^{\text{lign.}}$ *et la hauteur de* $4,10625^{\text{lign.}}$.

On a donc ici $k^2 = 33{,}466$ (lign. quar.), on avait en outre . . . . $a = 197{,}95$ (lign.) ; $b = 101{,}95$ (lign.) : ainsi l'équation (2) devient

$$\mu = \frac{316{,}00724}{t}.$$

Le temps t, donné par l'observation, est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	valeur de μ
1.e	508,″75	0,6211
2.e	513,25	0,6157
3.e	512	0,6172
4.e	513,50	0,6154
5.e	506,25	0,6242
6.e	506,75	0,6236
7.e	511,25	0,6181
8.e	507	0,6233

Somme = 4,9586

Moyenne arithmétique = 0,6198.

10. *Expériences faites avec un orifice rectangulaire et vertical, percé en mince paroi, dont la base est de* 15,975 lign. *et la hauteur de* 4,08125 lign.

On a $k^2 = 65{,}198$ (lign. quar.); on avait de plus $a = 197{,}62$ (lign.); $b = 101{,}62$ (lign.), d'où l'on tire

$$\mu = \frac{162{,}39743}{t}.$$

Le temps observé est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	valeur de μ
1.e	262,''50	0,6187
2.e	263	0,6175
3.e	260,75	0,6228
4.e	262,75	0,6181
5.e	261	0,6222
6.e	262,50	0,6187
7.e	262,50	0,6187
8.e	262	0,6198
9.e	262,50	0,6187
10.e	261,25	0,6216

Somme = 6,1968

Moyenne arithmétique = 0,6197.

11. *Expériences faites avec un orifice rectangulaire et vertical, percé en mince paroi, et dont la base est de* 32,05833 (lign.), *et la hauteur de* 4,08724 (lign.).

On a ainsi $k^2 = 131{,}030$ lign. quar.; de plus on avait $a = 198{,}2$ lign.; $b = 102{,}2$ lign., d'où l'on déduit

$$\mu = \frac{80{,}64633}{t}.$$

Le temps observé est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	valeur de μ
1.e	130,"25	0,6192
2.e	130,25	0,6192
3.e	130,50	0,6180
4.e	129,25	0,6240
5.e	129,50	0,6228
6.e	129,50	0,6228
7.e	130	0,6204
8.e	130,25	0,6192
9.e	129,75	0,6216
10.e	129,50	0,6228

Somme = 6,2100

Moyenne arithmétique = 0,6210.

12. *Expériences faites avec un orifice rectangulaire et vertical, percé en mince paroi, et dont la base est de*

64 lign., *et la hauteur de* 4,115625 lign.

On a donc ici $k^2 = 263,4$ lign.; on avait en outre . . . . . .
$a = 198,1922$ lign.; $b = 102,1922$ lign.; d'où l'on conclut

$$\mu = \frac{40,11654}{t}.$$

Le temps observé est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	valeur de μ
1.e	64,″25	0,6244
2.e	64	0,6268
3.e	64,25	0,6244
4.e	64,25	0,6244
5.e	64,25	0,6244
6.e	64	0,6268
7.e	63,50	0,6318
8.e	64,25	0,6244

Somme = 5,0074

Moyenne arithmétique = 0,6259.

13. Dans les tableaux précédens nous avons calculé la valeur de μ pour chacune des expériences relatives à un

même orifice, et de l'ensemble de ces valeurs nous avons déduit, pour le même orifice, la valeur moyenne de μ. C'est en effet ce qu'il faut faire pour l'exactitude de cette moyenne; quoique, d'après les données de ces expériences, on aurait pû prendre tout de suite pour la valeur moyenne de μ, relative à chaque orifice, celle qui repond à la moyenne des temps observés dans les expériences relatives à un même orifice. Car puisque on a $\mu = \frac{A}{t}$, A étant une quantité constante pour une même suite d'expériences, en nommant t', t'', t''', . . . $t^{(n)}$ les temps observés, on aura $\mu' = \frac{A}{t'}$; $\mu'' = \frac{A}{t''}$; . . . $\mu^{(n)} = \frac{A}{t^{(n)}}$; et la valeur moyenne de μ sera

$$\mu = \frac{\mu' + \mu'' + \mu''' + \ldots + \mu^{(n)}}{n}.$$

Or si l'on nomme t la valeur du temps qui repond à cette valeur moyenne de μ, il est clair qu'on aura

$$t = \frac{n\,A}{\mu' + \mu'' + \ldots + \mu^{(n)}},$$

ou bien

$$t = \frac{n}{\frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} + \ldots + \frac{1}{t^{(n)}}};$$

maintenant pour que cette valeur de t soit égale à la moyenne des temps observés t', t'', . . . $t^{(n)}$, il faut que l'on ait

$$\frac{n}{\frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} + \ldots + \frac{1}{t^{(n)}}} = \frac{t' + t'' + \ldots + t^{(n)}}{n},$$

équation que l'on peut mettre sous cette forme

$$\frac{(t'-t'')^2}{t't''}+\frac{(t'-t''')^2}{t't'''}+\ldots+\frac{(t''-t''')^2}{t''t'''}+\frac{(t''-t'''')^2}{t''t''''}+\ldots$$
$$+\frac{(t'''-t'''')^2}{t'''t''''}+\ldots=0:$$

d'où l'on voit que cette équation ne peut rigoureusement avoir lieu à moins que les temps t', t'', t''' . . . observés, ne soient tous égaux entr'eux : mais l'on voit aussi que la petitesse du premier membre de cette équation dépend de celle des termes $\frac{(t'-t'')^2}{t't''}$ etc. Or dans notre cas la somme de tous ces termes n'arrive pas à 0,005 pour la suite des expériences du n.° 9, et elle est encore moindre pour les suites des expériences rapportées aux n.os 10, 11 et 12.

14. Voyons maintenant quel est le dégré de précision que ces expériences peuvent comporter. En examinant la marche des temps observés dans chaque suite d'expériences, on voit d'abord que la plus grande différence absolue entre les temps observés diminue d'une suite à l'autre, à mesure que les aires des orifices augmentent, ce dont on donnera bientôt l'explication. On voit aussi que le rapport de la plus grande différence absolue entre les temps observés, au temps moyen, est, dans les expériences du n.° 9, moindre qu'un $\frac{1}{70}$, et que ce rapport est encore plus petit dans les expériences des n.os suivans. D'après le procédé avec lequel ces expériences ont été faites, le temps observé devait répondre à la durée de l'écoulement depuis l'instant où la

surface de l'eau découvrait l'épingle supérieure jusqu'à l'instant où la même surface, en s'abaissant, venait à découvrir l'épingle inférieure. Or le diamètre de ces épingles était d'un tiers de ligne, d'où il est facile de conclure que le temps employé par la surface de l'eau à parcourir ce diamètre était, dans les expériences du n.° 9, de 1″,52 pour l'épingle supérieure, et de 2″,12 pour l'épingle inférieure. Ces temps se réduisent à la moitié, au quart et à l'huitième pour les expériences des n.os 10, 11 et 12, respectivement. Maintenant il est aisé de voir, qu'en observant l'instant où chaque épingle venait à se découvrir, on pouvait facilement se tromper de tout le diamètre de l'épingle, tant au commencement qu'à la fin de l'expérience. Ainsi en considérant cette seule source d'erreur, on explique pourquoi les différences absolues entre les temps observés sont plus considérables dans les expériences du n.° 9, que dans celles des n.os suivans, où ces différences diminuent, parceque les orifices étant plus grands, l'abaissement de la surface de l'eau dans le reservoir était plus rapide.

À cette cause d'erreur en ajoutant celles qui dépendent de l'observation du temps et de la mesure des autres élémens, on verra que les écarts de ces expériences entr'elles sont compris dans les limites des erreurs inévitables et propres à ce genre d'observations. La plus grande différence entre les valeurs de μ dans les expériences du n.° 9, n'arrive pas à $\frac{1}{70}$ de la valeur moyenne de μ relative à ces mêmes

expériences ; et cette différence est, pour les expériences des n.ºs 10, 11 et 12 moindre qu'un $\frac{1}{70}$ de la valeur moyenne de μ relative à ces expériences.

Enfin on peut remarquer que la détermination du coëfficient μ ne parait pas susceptible d'un plus grand dégré de précision : car la différence entre les valeurs de μ qu'ont obtenues divers auteurs pour les orifices quarrés et circulaires percés en minces parois, et des quelles on a déduit la valeur moyenne ordinaire de μ pour ces orifices, surpasse parfois d'un $\frac{1}{50}$ et même de plus, cette même valeur moyenne.

15. En réunissant les résultats des expériences rapportées aux n.ºs 9, 10, 11 et 12, on formera le tableau suivant où la hauteur h de chaque orifice est la même pour tous.

Orifices	Hauteur	Largeur	Aire	Périmètre	Valeur de μ
1.^{e}	h	$2h$	$2h^2$	$6h$	0,6198
2.^{e}	h	$4h$	$4h^2$	$10h$	0,6197
3.^{e}	h	$8h$	$8h^2$	$18h$	0,6210
4.^{e}	h	$16h$	$16h^2$	$34h$	0,6259

16. Maintenant nous observerons que dans ces expériences les charges d'eau, considérées en elles-mêmes, étaient

petites, soit au commencement soit à la fin de chaque expérience, savoir de $16^{pouc.},5$ et de $8^{pouc.},5$; et l'on sait que le coëfficient de la contraction augmente à mesure que la charge d'eau diminue, quoique cette augmentation puisse être négligée sans erreur sensible dans les applications ordinaires. Nous observerons encore, que dans le tableau formé par M. Eytelwein (*) où il a recueilli les diverses valeurs du coëfficient de la contraction obtenues par des expériences faites avec des orifices percés en minces parois et sous de grandes charges d'eau, on trouve que la plus grande valeur de ce coëfficient est 0,61912 pour les orifices quarrés, et 0,62275 et même 0,62451 pour les orifices circulaires.

17. D'après cela on voit que les valeurs de μ données par nos expériences ne sortent pas des limites des valeurs du même coëfficient obtenues par des expériences faites avec des orifices quarrés et circulaires, et que par conséquent dans les applications ordinaires on peut employer sans erreur sensible, même pour les orifices rectangulaires, dont la largeur est seize fois la hauteur, le coëfficient dont on se sert pour les orifices quarrés et circulaires. En effet en prenant pour la valeur de ce dernier coëficient le nombre 0,6190, ainsi qu'il a été conclu et proposé par

(*) Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Berlin, années 1814-1815, imprimés en 1818. (partie mathématiq. pag. 172).

M. Eytelwein, dans l'endroit cité, on aurait, d'après nos expériences, 0,6259 pour la valeur de ce coëfficient pour un orifice rectangulaire, dont la largeur est seize fois la hauteur: or on a $0{,}6259=0{,}6190\ (1+\frac{1}{90})$; ainsi l'excés du coëfficient 0,6259 sur le coëfficient ordinaire n'est que la 90.ème partie de celui-ci, et l'on peut par conséquent le négliger dans les applications ordinaires.

18. Mais en regardant la chose de plus près, et du côté théorique, tout parait indiquer une diminution dans la contraction de la veine, à mesure que la largeur des orifices augmente, la hauteur restant la même. Le tableau du n.° 15 porte à cette conclusion, qui est plus évidente pour les orifices dont les bases étaient huit et seize fois plus grandes que la hauteur. Mais pour confirmer la vérité et la constance de cette conclusion, il faudrait pousser plus loin les expériences de ce genre, en employant des orifices d'une plus grande largeur que celle qu'avaient les orifices dont je me suis servi dans ces expériences. Du reste tout semble aussi indiquer que la figure de l'orifice, ses angles et la situation de ceux-ci, ont quelque influence sur la quantité de la contraction. Ainsi dans les orifices circulaires la veine se contracte un peu moins que dans les orifices quarrés; et la contraction diminue encore dans les orifices rectangulaires d'une grande base par rapport à la hauteur. Cette diminution parait provenir de la position qu'ont les angles dans ces derniers orifices, qui est telle que la plus

grande partie de leur périmètre est développée en ligne droite sans angles et sans courbure. Enfin M. Hachette a reconnu l'influence qu'ont les angles rentrans de l'orifice sur la quantité de la contraction (*).

§. III.

Expériences sur l'écoulement par des orifices quarrés, pour lesquels la contraction n'avait pas lieu sur tous les côtés.

19. Pour ces expériences je me suis servi du même reservoir et du même procédé que j'ai décrits dans le §. I. Pour cela dans la paroi de ce reservoir, opposée à celle dont j'ai parlé dans le n.° 2, j'ai fait pratiquer une ouverture rectangulaire et verticale, évasée au déhors. À cette ouverture et à la face intérieure de la paroi j'ai fait adapter un orifice rectangulaire percé dans une mince plaque de cuivre, de manière que la base de cet orifice se trouvait dans le plan même du fond du reservoir, ou, pour

(*) Rapport de MM. Poisson, Ampère et Cauchy du 14 octobre 1816 (annales de Chimie et de Physique tom. 3.e pag. 80). Ici je me permettrai d'observer que les questions sur les ajutages, proposées à la fin de ce rapport, se trouvent résolues dans l'ouvrage de M. Venturoli imprimé à Bologne en 1809, ayant pour titre *Elementi di Meccanica e d'Idraulica* (tom. 2.e liv. 2.e). Ce même Auteur avait déjà donne la theorie de l'écoulement par des tuyaux additionnels dans un memoire imprimé dans le tom. XII *des mémoires de la Société Italienne des Sciences* (première partie, Modène 1805. pag. 277).

mieux dire, le bord même de ce fond servait de base à l'orifice. À cet endroit j'ai fait encastrer une large plaque de cuivre dans le fond du vase, pour que le bord de cette plaque, qui formait à la fois le bord du fond et la base de l'orifice, ne fut exposé à aucune altération. L'orifice était d'ailleurs, par rapport à ses deux côtés verticaux, et à son côté horizontal supérieur, dans les mêmes circonstances que les orifices que l'on nomme en minces parois.

20. Dans la même paroi, à l'un des coins de la caisse, j'ai fait pratiquer une autre ouverture verticale, et j'ai fait pareillement encastrer dans le fond et dans la paroi latérale contigüe, des larges plaques de cuivre: ensuite j'ai fait adapter à cette ouverture et en dedans de la caisse un orifice percé dans une mince plaque de cuivre, de manière que sa base était formée par le bord même du fond de la caisse, et un de ses côtés verticaux était formé par le bord de la paroi latérale de la caisse, l'un et l'autre de ces bords étant ceux des plaques de cuivre encastrées dans le fond et dans la paroi ainsi qu'on vient de le dire. Par là cet orifice était, par son côté horizontal supérieur et par un côté vertical, dans les mêmes circonstances que les orifices en minces parois: mais quant à sa base et à l'autre côté vertical, il en différait essentiellement en ce que cette base et ce côté ne consistaient proprement que dans les arêtes des faces internes du fond et de la paroi verticale du reservoir.

21. On avait ainsi deux orifices, dont l'un n'était percé

en mince paroi que sur trois côtés, et l'autre sur deux seulement: mais je pouvais facilement faire en sorte que dans ces mêmes orifices la contraction n'eut lieu que sur un plus petit nombre de côtés. Pour cela j'ai fait préparer une pièce de bois de la longueur et de la largeur de six pouces, et de l'épaisseur d'un pouce. Elle était parfaitement équarrie, et avait toutes ses faces planes et polies. Une de ses grandes faces quarrées était recouverte d'une plaque de cuivre bien dressée et parfaitement terminée à ses bords. Pour voir l'usage de cette pièce considérons un des deux orifices dont on vient de parler, celui, par exemple, qui était pratiqué dans un des coins de la caisse (fig. 7 e). Si l'on conçoit que l'on pose cette pièce sur le fond du reservoir de manière que les faces quarrées de la pièce soient verticales et perpendiculaires à la paroi dans laquelle est percé l'orifice; et qu'en conservant ces conditions, on l'amène à être en contact avec la face interne de cette paroi; et qu'enfin on fasse mouvoir la pièce parallélement à elle-même vers l'orifice jusqu'à ce que la distance entre la pièce et la paroi latérale, contigüe à l'orifice, soit égale à la largeur de l'orifice; et que dès que la pièce aura cette position, on l'arrête fixement d'une manière invariable; il est clair que l'orifice ne doit être considéré comme percé en mince paroi, que par son côté supérieur horizontal. Il faut noter que la plaque de cuivre qui recouvre la pièce de bois, doit être tournée vers l'orifice.

Ce que l'on vient de dire sur la position de cette pièce dans cet exemple, doit s'appliquer aux autres positions que nous avons données à la même pièce dans ces expériences. On notera en dernier lieu, que les orifices étant des quarrés d'un demi pouce de côté, à peu de chose près, et la pièce ci-devant mentionnée étant un quarré de six pouces de côté, on doit regarder la face de cette pièce comme indéfinie comparativement aux dimensions de l'orifice, tandis que l'emploi et la position de la même pièce n'altéraient point la section du reservoir, qui était très-grande par rapport à l'orifice.

22. Les aires de ces orifices étant très-petites relativement à la section du récipient, et leurs hauteurs étant pareillement très-petites par rapport à la charge d'eau, soit au commencement soit à la fin de l'expérience, et enfin l'écoulement se faisant librement dans l'air; les formules du n.° 7 serviront aussi pour ces expériences, de sorte qu'en retenant les mêmes dénominations, on aura l'équation

$$(2) \qquad \mu = \frac{(2662,26065)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{k^2 t},$$

où a, b et k doivent être exprimés en lignes.

23. Pour ne laisser lieu à aucune obscurité sur le véritable état de la question, je remarquerai que la contraction de la veine dans les orifices percés en minces parois est telle que le liquide, en sortant, ne fait que glisser sur les arêtes intérieures de l'orifice, sans en toucher

les arêtes extérieures, et la veine commence aussitôt à se contracter, de sorte que l'épaisseur de la plaque, dans laquelle est percé l'orifice, n'est pas touchée par le liquide. Ce fait résulte de l'observation immédiate de l'écoulement par des orifices percés en minces parois; et lorsque ce fait se vérifie, l'orifice est proprement percé dans une mince paroi, quelle que puisse être d'ailleurs l'épaisseur absolue de celle-ci. Dans les orifices dont il s'agit actuellement, la contraction n'avait pas lieu sur un ou sur plusieurs côtés de l'orifice, tandis qu'elle avait lieu sur les autres côtés: c'est-à-dire l'eau en sortant ne faisait que toucher les arêtes intérieures des côtés de l'orifice, pour lesquels la contraction avait lieu; et pour les côtés où la contraction n'avait pas lieu, l'eau en suivant les parois internes contigües à ces côtés, touchait les arêtes intérieures et extérieures de ces mêmes côtés, et parcourait ainsi le plan de l'épaisseur de la plaque comprise entre ces arêtes; de sorte que pour les côtés où il n'y avait pas de contraction, l'on peut dire que l'eau s'écoulait à plein tuyau, ou à gueulebée. Ce fait résulte aussi de l'observation immédiate de l'écoulement par ces orifices.

Il est facile d'après cela d'avoir une idée claire et précise de ce que l'on signifie ici en disant, par exemple, que la contraction n'avait pas lieu sur le côté inférieur d'un orifice, cette expression étant équivalente à cette autre: orifice pour lequel la contraction n'avait lieu que sur le côté horizontal supérieur, et sur les deux côtés verticaux:

et l'on entend enfin aisément que lorsque, par exemple, la contraction n'a pas lieu sur les deux côtés horizontaux d'un orifice rectangulaire et vertical, la hauteur de la section de la veine contractée est la même que celle de l'orifice, et la contraction ne se fait, dans ce cas, que dans les sens de la largeur de l'orifice.

24. *Expériences faites avec un orifice rectangulaire et vertical, pour lequel la contraction n'avait lieu que sur les deux côtés verticaux et sur le côté horizontal supérieur.* (fig. 3.e).

Dans la fig. 3.e et dans celles des expériences suivantes on a désigné par des lignes ponctuées la section de la veine à sa sortie près de l'orifice. Ces lignes montrent les côtés pour lesquels la contraction avait lieu : leur distance aux côtés correspondans de l'orifice devenait visiblement plus grande à mesure que la contraction était détruite sur un plus grand nombre de côtés.

On avait ici $a = 237^{\text{lign.}}, 51735$; $b = 141^{\text{lign.}}, 51735$; la largeur de l'orifice était de $5^{\text{lign.}}, 96178$, et la hauteur de $5^{\text{lign.}}, 96530$; ainsi l'on a $k^2 = 35^{\text{lign. quar.}}, 56385$ et l'équation (2) donne

$$\mu = \frac{263,16480}{t}.$$

Le temps observé est comme il suit.

Expériences	t ou temps observé	Valeur de μ
1.e	409,"25	0,6430
2.e	412	0,6387
3.e	412	0;6387
4.e	412	0,6387
5.e	414,50	0,6349
6.e	413,25	0,6368
7.e	413,75	0,6360
8.e	413,50	0,6364
9.e	414,25	0,6353
10.e	412,25	0,6384
11.e	411,50	0,6395
12.e	410,25	0,6415
13.e	410,50	0,6411
14.e	407,50	0,6458

Somme = 8,9448

Moyenne arithmétique = 0,6389.

25. *Expériences faites avec l'orifice précédent, pour lequel la contraction n'avait lieu que sur les deux côtés verticaux.* (fig. 4.e).

Les quantités a, b et k ont les mêmes valeurs que dans le n.° précédent, ainsi l'on aura

$$\mu = \frac{263,16480}{t}.$$

Pour détruire la contraction sur le côté horizontal supérieur de l'orifice, j'ai employé le procédé décrit au n.° 21, et la contraction n'avait plus lieu sur ce côté, et comme en même tems elle n'avait pas lieu sur la base de l'orifice, la contraction ne se faisait que sur les deux côtés verticaux. Ce fait résulte de l'observation immédiate de l'écoulement par cet orifice.

Le temps observé est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	Valeur de μ
1.e	404″	0,6514
2.e	405	0,6498
3.e	402,75	0,6534
4.e	405	0,6498
5.e	403,50	0,6522

Somme = 3,2566

Moyenne arithmétique = 0,6513.

26. *Expériences faites avec l'orifice précédent, pour lequel la contraction n'avait lieu que sur le côté horizontal supérieur et sur un côté vertical.* (fig. 5.e).

Les quantités a, b et k ont ici les mêmes valeurs que dans les expériences des deux numéros précédens, ainsi l'on aura

$$\mu = \frac{263,16480}{t}.$$

Encore ici par le procédé décrit au n.º 21 on a détruit la contraction de la veine sur un côté vertical de l'orifice, en sorte qu'elle ne se faisait visiblement que sur l'autre côté vertical, et sur le côté horizontal supérieur.

Le temps t donné par l'observation est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	Valeur de μ
1.^{e}	397″,25	0,6625
2.^{e}	396,25	0,6641
3.^{e}	396,75	0,6633
4.^{e}	397,75	0,6616
5.^{e}	398,75	0,6600

Somme = 3,3115

Moyenne arithmétique = 0,6623.

27. *Expériences faites avec un orifice rectangulaire et vertical pour lequel la contraction n'avait pas lieu sur le côté horizontal inférieur et sur un côté vertical.* (fig. 6.e).

Cet orifice est celui qu'on avait pratiqué dans un des coins de la caisse, et qu'on a décrit au n.° 20. L'on avait ici $a = 237^{\text{lign.}},516675$; $b = 141^{\text{lign.}},516675$: la largeur de l'orifice était de $5^{\text{lign.}},75089$, et la hauteur de $5^{\text{lign.}},96665$; partant $k^2 = 34^{\text{lign. quar.}},31355$, et

$$\mu = \frac{272,75441}{t}.$$

Le temps donné par l'observation est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	Valeur de μ
1.e	413″	0,6604
2.e	412,50	0,6612
3.e	411,50	0,6628
4.e	314,50	0,6580
5.e	411,50	0,6628
6.e	411,50	0,6628
7.e	412,50	0,6612
8.e	411,50	0,6628
9.e	410,50	0,6644
10.e	413,50	0,6596
11.e	410,50	0,6644
12.e	411,50	0,6628
13.e	411,50	0,6628
14.e	412,50	0,6612
15.e	412	0,6620

Somme = 9,9292

Moyenne arithmétique = 0,6619.

28. *Expériences faites avec l'orifice précédent, dans lequel la contraction n'avait lieu que sur le côté horizontal supérieur.* (fig. 7.e).

Les quantités a, b et k ont ici les mêmes valeurs que dans les expériences du n.° précédent, ainsi l'on a encore

$$\mu = \frac{272,75441}{t}.$$

La contraction a été détruite sur l'un des côtés verticaux de l'orifice par le moyen indiqué au n.° 21, et la veine en sortant n'éprouvait visiblement de contraction que sur le côté horizontal supérieur de l'orifice.

Le temps observé est comme il suit :

Expériences	t ou temps observé	Valeur de μ
1.e	393,″50	0,6931
2.e	393	0,6940
3.e	394,25	0,6918
4.e	392,25	0,6954
5.e	391	0,6976
6.e	394,75	0,6910
7.e	392,25	0,6954
8.e	392,50	0,6949
9.e	392,75	0,6945
10.e	392,50	0,6949

Somme = 6,9426

Moyenne arithmétique = 0,6943.

29. On peut faire sur les temps observés dans ces expériences des remarques analogues à celles du n.° 14, que nous nous dispenserons de répéter ici. Mais nous croyons essentiel, pour fixer les résultats obtenus par ces expériences, de rappeller les circonstances suivantes, savoir que les orifices étaient à très-peu-près des quarrés, et qu'on peut les regarder comme tels; que la charge d'eau était fort-grande comparativement à la hauteur de ces orifices,

pendant toute la durée de chaque expérience; que les orifices étaient percés en minces parois par rapport aux côtés pour lesquels la contraction de la veine avait lieu ; et qu'enfin l'aire de chaque orifice était très-petite par rapport à la section du reservoir. On a donc, dans ces circonstances, les résultats suivans.

Lorsque la contraction de la veine a lieu	La valeur de μ donnée par l'expérience est	Expériences
Sur tous les quatre côtés.	0,6190	Expériences faites avec des orifices percés en minces parois.
Sur trois côtés seulement, savoir sur les deux côtes verticaux, et sur le côté horizontal supérieur.	0,6389	Expériences rapportées ci-dessus au n.° 24.
Sur deux côtés seulement, savoir sur les deux côtés verticaux.	0,6513	Expériences rapportées ci-dessus au n.° 25.
Sur deux côtés seulement, savoir sur le côté horizontal supérieur et sur un côté vertical.	0,6621	Expériences rapportées ci dessus aux n.os 26 et 27; la valeur de μ ci-contre est la moyenne entre celles données dans ces n.os
Sur un côté seulement, savoir sur le côté horizontal supérieur.	0,6943	Expériences rapportées ci-dessus au n.° 28.

30. Il résulte donc que lorsque la contraction n'a pas lieu sur tous les côtés de l'orifice, la section de la veine ainsi contractée est plus grande que celle de la veine contractée dans les orifices où la contraction se fait sur tous les côtés. Il résulte encore que la contraction diminue à mesure qu'elle n'a lieu que sur un plus petit nombre de côtés. Enfin on voit que l'aire de la section contractée n'est pas tout-à-fait la même lorsque la contraction n'a lieu que sur deux côtés parallèles de l'orifice, et lorsqu'elle n'a lieu que sur deux côtés contigus.

Il est visible que ces résultats ainsi que les valeurs de μ rapportées dans le n.° précédent, peuvent s'étendre et s'appliquer à des orifices horizontaux, pourvu que toutes les autres circonstances demeurent les mêmes et que la surface de l'eau dans le reservoir soit, pendant l'écoulement, à une hauteur au-dessus de l'orifice plus grande que celle du conoïde qui se forme en dedans du reservoir près de l'orifice même.

31. Il suit de là que dans le calcul de la dépense d'un orifice, pour lequel la contraction de la veine n'a pas lieu sur tous les côtés, le coëfficient de la contraction qu'il faut employer pour avoir la dépense effective, a des valeurs différentes entr'elles selon que la contraction n'a pas lieu sur un ou sur plusieurs côtés, et il est dans tous les cas sensiblement plus grand que celui qui convient aux orifices percés en minces parois et dans lesquels la contraction se fait sur tous les côtés.

Mais les expériences précédentes montrent en même temps que les valeurs du coëfficient dont il s'agit, sont bien loin d'être conformes à la loi que quelqu'auteur a adoptée en supposant que le déchet qu'on a lorsque la contraction se fait sur tous les côtés d'un orifice percé en mince paroi, diminue dans le rapport de la partie du périmètre pour laquelle la contraction a lieu, au périmètre total de l'orifice. Ainsi, d'après cette supposition, l'on aurait

$$1 - \frac{p}{P}(0,3810)$$

pour la valeur du coëfficient de la contraction lorsque celle-ci n'a lieu que sur la partie p du périmètre P de l'orifice. Partant en considérant un orifice quarré et faisant $p = \frac{3}{4}P$, on aurait 0,7142 pour le coëfficient de la contraction lorsqu'elle ne se fait que sur trois côtés de l'orifice; et les valeurs de ce coëfficient seraient 0,8095, 0,9048 lorsque la contraction n'a lieu que sur deux côtés de l'orifice ou sur un seulement. L'on voit par là que ces valeurs sont très-différentes de celles données directement par l'expérience, et qu'en les employant on en conclurait des dépenses beaucoup plus grandes que les véritables (*).

32. Dans ces expériences je n'ai pas fait d'autres combinaisons relativement à la contraction sur les divers côtés

---

(*) *Del movimento e della misura delle acque correnti, di Antonio Tadini. Milano* 1816. pag. 224-225.

de l'orifice que celles que j'ai rapportées : mais il parait qu'elles suffisent pour tous les cas lorsque l'orifice est un quarré et la charge d'eau très-grande en comparaison de la hauteur de l'orifice, ainsi que cela avait lieu dans ces expériences. On peut donc, dans ces circonstances, établir que lorsque la contraction ne se fait que sur trois côtés, quelsqu'ils soient d'ailleurs, la valeur du coëfficient de la contraction est 0,6389 ; et lorsque la contraction ne se fait que sur un seul côté, quelqu'il soit, la valeur du même coëfficient est 0,6943 : lorsque enfin la contraction se fait sur deux côtés seulement, nous avons remarqué, d'après l'expérience, que le coëfficient de la contraction pour deux côtés parallèles n'est pas tout-à-fait le même que celui relatif à deux côtés contigus : cependant la différence entre les valeurs de ces deux coëfficients étant fort-petite, on peut prendre leur moyenne pour celle qui convient au coëfficient de la contraction lorsqu'elle n'a lieu que sur deux côtés quelconques : cette moyenne est 0,6567.

En faisant donc $\mu = 0,6190$, qui est la valeur du coëfficient de la contraction lorsqu'elle se fait sur tout le périmètre d'un orifice percé dans une mince paroi, et en nommant μ', μ'', μ''' les coëfficiens relatifs aux cas, où la contraction n'a pas lieu sur un côté de l'orifice, sur deux, ou sur trois, on aura

$$\mu = 0,6190;$$
$$\mu' = 0,6389 = \mu\,(1,032);$$
$$\mu'' = 0.6567 = \mu\,(1,061);$$
$$\mu''' = 0,6933 = \mu\,(1,122).$$

L'on peut remarquer que les excés de μ', μ'' et μ''' sur μ sont entr'eux comme les nombres 1, 2 et 4. Ces valeurs de μ', μ'' et μ''', que nous avons obtenues pour des orifices quarrés, peuvent ne pas être les mêmes pour des orifices rectangulaires, dont les côtés contigus sont très-inégaux entr'eux : ceci ne peut être constaté que par l'expérience.

33. En terminant ce paragraphe je rapporterai quelques particularités qu'on observe dans les écoulemens des orifices, pour lesquels la contraction de la veine n'a pas lieu sur tous les côtés : elles sont analogues à d'autres semblables observées par M. Venturi (*), et peuvent contribuer à faire mieux connaître les élémens d'où dépend le curieux phénomène de la contration de la veine fluide.

La veine de l'orifice pour lequel la contraction n'avait pas lieu sur la base inférieure (expériences du n.° 24) prend, à peu de distance de l'orifice, la forme d'une mince lame, dont le plan est vertical. La plus-grande largeur de cette lame est de 2, 75 pouc. Le jet est parabolique et il se fait dans le plan vertical qui passe par l'axe de l'orifice. Lorsque la contraction ne se fait que sur les deux côtés verticaux (expériences du n.° 25), la veine a aussi la

(*) Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides, par J. B. Venturi. Paris 1797. pag. 79. expérience XXXIV.

forme d'une lame (fig. 8.e) dont le plan est vertical et passe par l'axe de l'orifice : mais cette lame est beaucoup plus mince et plus large que celle du cas précédent, de sorte qu'elle a 6,^{pouc} 25 de largeur à 10 pouces de distance de l'orifice, où la largeur de la lame est la plus grande. Pendant les observations précédentes la charge d'eau était de 24 à 20 pouces.

Dans les expériences du n.º 28 où la contraction n'avait lieu que sur le côté horizontal supérieur de l'orifice, le jet était dirigé dans le plan vertical passant par l'axe de l'orifice, et la veine avait la forme d'une nappe très-mince, dont la largeur était horizontale.

Pour l'orifice relatif aux expériences des n.ºs 26 et 27, où la contraction n'avait pas lieu sur la base inférieure et sur un côté vertical, le jet ne se faisait plus dans le plan vertical passant par l'axe de l'orifice, mais il se dirigeait dans un autre plan vertical incliné à celui-là d'un angle de 15.º, la déviation du jet et de son plan se faisant vers le côté vertical de l'orifice, sur lequel la contraction n'avait pas lieu. La fig. 9.e représente la projection horizontale du jet et du reservoir. La veine avait la forme d'une lame dont la largeur était inclinée à l'horizon, et cette lame se partageait par fois en deux autres veines distinctes à la distance d'environ un pied de l'orifice. Pendant ces observations la charge d'eau était de 23 à 20 pouces.

La déviation du jet dont on vient de parler, a été plus grande encore pour l'orifice pratiqué au coin de la caisse (n.° 20), après l'avoir préparé de manière que la contraction n'avait lieu que sur un côté vertical de l'orifice. La déviation a été ici de 22°,5 (fig. 10.e), c'est-à-dire le jet se faisait dans un plan vertical incliné de 22°,5 sur le plan vertical passant par l'axe de l'orifice, le jet et son plan étant dirigés vers le côté de l'orifice, pour lequel la contraction n'avait pas lieu. La forme de la veine était celle d'une lame très-mince, dont la largeur était verticale. Pendant ces observations il y avait 24 à 20 pouces de hauteur d'eau dans le reservoir.

34. De ces observations il résulte que la veine et le jet changent de figure et de direction lorsqu'on change simplement et d'une manière quelconque l'ordre dans lequel se trouvent les côtés pour lesquels la contraction a lieu et ceux pour lesquels elle n'a pas lieu, quoique le coëfficient de la contraction puisse demeurer sensiblement le même dans ces permutations. Ainsi l'on a vu que ce coëfficient est à très-peu-près le même lorsque la contraction ne se fait que sur deux côtés, soient ils parallèles, ou contigus: mais la figure de la veine et la direction du jet sont dans ces deux cas très-différens entr'eux.

Dans les orifices verticaux, pour lesquels la contraction a lieu sur un côté vertical, et elle n'a pas lieu sur l'autre, le jet ne se fait plus dans le plan vertical passant par

l'axe de l'orifice, mais il éprouve une déviation par rapport à ce plan. On a souvent occasion d'observer une semblable déviation latérale du courant dans le passage de l'eau à travers des pertuis ou des rétrécissemens quelconques, pratiqués dans les canaux et dans les fleuves. La manière de pouvoir produire ou empêcher cette déviation parait mériter quelque attention. Car pour jeter sur la gauche, par exemple, le courant qui sort par une ouverture verticale, il suffit de détruire la contraction sur le côté même de l'ouverture situé à la gauche (fig. 11.e), et réciproquement : et il est visible que cette déviation latérale n'a plus lieu, si la contraction se fait de la même manière sur les deux côtés verticaux de l'ouverture.

§. IV.

Sur la manière d'avoir égard à la contraction de la veine fluide dans le calcul de la dépense des orifices verticaux.

35. Soit un orifice rectangulaire et vertical, dont la base ou la largeur est horizontale, et considérons le cas où l'écoulement se fait librement dans l'air, l'eau dans le reservoir étant sensiblement stagnante, et entretenue à une hauteur invariable. En nommant a la hauteur de l'orifice, l sa largeur, b la charge d'eau et g la gravité, nous

aurons, pour la dépense de l'orifice, l'expression

$$\frac{2}{3} l \sqrt{2g}. \left[(a+b)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right]$$

laquelle se rapporte au cas, où la contraction de la veine est nulle. Maintenant la manière ordinaire d'avoir égard au déchet occasioné par la contraction, consiste à multiplier l'expression précédente par μ, μ étant le coëfficient de la contraction, et l'on représente la dépense effective de l'orifice par la formule

$$(M) \qquad Q = \frac{2}{3} . \mu l \sqrt{2g} \left[(a+b)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right].$$

Mais cette manière d'avoir égard à la contraction ne parait pas exacte et rigoureuse pour les orifices verticaux, et peut, dans certains cas, rendre l'expression précédente de la dépense assez différente de celle qu'on obtient, en introduisant convenablement dans le calcul les modifications dûes à la contraction de la veine.

36. Pour le faire voir, soit T (fig. 12.e) un vase entretenu constamment plein jusqu'à la hauteur A, et BC un orifice vertical et rectangulaire, percé dans une mince paroi. Il est clair que la veine en sortant de l'orifice se contractera, et sa section se réduira à HG. Or c'est proprement cette section HG de la veine contractée, qui forme le véritable orifice dont on doit déterminer la dépense. Pour cela des points H et G tirons les lignes horizontales HB', GC', et supposons que la coupe verticale BC

de l'orifice passe par le milieu de la largeur du même orifice. Soit, comme ci-dessus, $BC=a$; $AB=b$, et l la largeur de l'orifice. Maintenant en vertu de la contraction les côtés de l'orifice doivent être réduits à ceux de la section contractée : partant si HG est la hauteur de cette section, il est clair que $BB'+C'C$ sera la quantité dont la hauteur a de l'orifice se trouvera diminuée. Soit $BB'=\alpha a$; $C'C=\alpha' a$: soient pareillement λl, $\lambda' l$, les quantités dont la largeur l doit être diminuée de part et d'autre de BC, pour dévenir égale à la largeur de la section contractée. On aura pour la hauteur de cette section, $B'C'=(1-\alpha-\alpha')a=HG$; sa largeur sera $(1-\lambda-\lambda')l$, et le produit . . . . . $(1-\alpha-\alpha')(1-\lambda-\lambda')\,al$ en représentera l'aire.

En regardant donc la section HG de la veine contractée comme un orifice où la contraction est nulle, et désignant par Q' sa dépense, on aura, d'après la théorie ordinaire de l'écoulement par des orifices verticaux,

$$dQ'=(1-\lambda-\lambda')\,ldx\sqrt{2g\,(b+x)}$$

pour l'expression de la dépense infiniment petite d'un rectangle élémentaire, dont la largeur $(1-\lambda-\lambda')\,l$ est égale à celle de la section contractée, et dont la hauteur est dx, l'origine des x étant au point B, et la charge d'eau de ce rectangle étant $b+x$. Maintenant pour avoir la dépense totale, il faut intégrer l'expression précédente depuis $x=BB'=\alpha a$, jusqu'à $x=BC'=(1-\alpha')\,a$, c'est-à-dire pour la hauteur $B'C'=HG$ de la section contractée. On aura

donc

$$(N) \qquad Q' = \frac{2}{3}(1-\lambda-\lambda')l\sqrt{2g}\left[(b+a-\alpha'a)^{\frac{3}{2}}-(b+\alpha a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

37. L'emploi de cette formule et sa comparaison avec la formule ordinaire (M) exigent que l'on connaisse dans tous les cas les valeurs des coëfficiens α, α', λ, λ' qui représentent les quantités dont les côtés de l'orifice diminuent par l'effet de la contraction. Ces quantités doivent à la rigueur être considérées individuellement, et introduites dans la formule de la dépense par le procédé dont nous avons fait usage pour obtenir la formule (N); car elles peuvent vraiment être inégales entr'elles, ainsi que cela arrive toujours, lorsque la contraction n'a lieu que sur quelques côtés de l'orifice (voyez les expériences du §.e précédent) : et Bossut (*) a observé que le rétrécissement de la veine n'est pas le même en tous sens lorsque la charge d'eau est petite par rapport à la hauteur d'un orifice vertical et percé dans une mince paroi.

D'après les dénominations que nous avons employées, l'aire de la section contractée est exprimée par . . . . . . $(1-\alpha-\alpha')(1-\lambda-\lambda')al$, et les expériences faites jusqu'ici ont seulement fait connaitre le coëfficient

$$\mu=(1-\alpha-\alpha')(1-\lambda-\lambda')\,;$$

(*) Hydrodynamiq. tom. 2.e n.o 467.

ainsi il reste encore, en général, à déterminer trois des coëfficiens α, α', λ, λ' pour connaître de combien et dans quel sens il faut diminuer les côtés de l'orifice, pour qu'ils deviennent respectivement égaux à ceux de la section contractée.

38. Les expériences dans lesquelles on s'est servi d'orifices verticaux, percés dans de minces parois, pour déterminer la valeur de μ, sont toutes telles, que la charge d'eau était très-grande par rapport à la hauteur de l'orifice. En faisant donc dans l'équation (N) b très-grand par rapport à a, il vient, en négligeant les puissances de $\frac{a}{b}$ supérieures à la première,

$$Q' = (1-\alpha-\alpha')(1-\lambda-\lambda')al\sqrt{2gb}\left[1+\frac{(1+\alpha-\alpha')a}{4b}\right];$$

dans la même hypothèse l'équation (M) donne

$$Q = \mu al\sqrt{2gb}\left[1+\frac{a}{4b}\right]:$$

et puisqu'on a $(1-\alpha-\alpha')(1-\lambda-\lambda') = \mu$, il viendra

$$Q'-Q = \mu al\sqrt{2gb}\left[\frac{(\alpha-\alpha')a}{4b}\right].$$

Cette différence est d'autant plus petite que b est plus grand que a, et que le facteur $\alpha-\alpha'$ est moins considérable : ce facteur, dans le cas des orifices verticaux percés dans de minces parois et sous de grandes charges d'eau par rapport à la hauteur des orifices, est certainement très-petit, s'il n'est pas tout-à-fait insensible.

Il résulte donc que lorsque la charge d'eau est considérable comparativement à la hauteur de l'orifice, les deux formules (M) et (N) donnent la même dépense : par conséquent les expériences où cette condition avait lieu, sont très-propres à déterminer aussi exactement qu'on peut le désirer, la valeur du coëfficient μ de la contraction de la veine.

39. Passons maintenant au cas où la charge d'eau est petite, et comparable à la hauteur de l'orifice. Faisons $b = na$, n étant un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire ; les équations (M) et (N) prendront les formes suivantes,

$$Q = \frac{2}{3}\mu\, al\sqrt{2ag}\left[(n+1)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}\right];$$

$$Q' = \frac{2}{3}(1-\lambda-\lambda')\, al\sqrt{2ag}\left[(n+1-\alpha')^{\frac{3}{2}} - (n+\alpha)^{\frac{3}{2}}\right];$$

et observant que l'on a $(1-\alpha-\alpha')(1-\lambda-\lambda') = \mu$, ces équations donneront

$$(R) \qquad Q' = Q \cdot \frac{\left[(n+1-\alpha')^{\frac{3}{2}} - (n+\alpha)^{\frac{3}{2}}\right]}{(1-\alpha-\alpha')\left[(n+1)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}\right]}.$$

Cette expression de Q' fait voir que l'on a $Q' = Q$ non seulement dans le cas de n très-grand, mais encore lorsqu'on a $\alpha = \alpha' = 0$, c'est-à-dire lorsque la contraction n'a pas lieu sur les côtés horizontaux supérieur et inférieur

de l'orifice. Dans les autres cas la valeur de Q' diffère plus ou moins de celle de Q.

Considérons un orifice quarré, percé dans une mince paroi, et prenons $\alpha=\alpha'=\lambda=\lambda'$, ce que l'on peut faire sans s'éloigner sensiblement de la vérité, quoique cette hypothèse ne soit pas tout-à-fait exacte, d'après l'observation de Bossut, rapportée ci-dessus au n.° 37. On aura donc ici $\mu=0{,}62$; $(1-\alpha-\alpha')(1-\lambda-\lambda')=0{,}62$; partant $\alpha=\alpha'=0{,}1063$; et l'équation (R) deviendra

$$Q'=Q.\frac{[(n+0{,}8937)^{\frac{3}{2}}-(n+0{,}1063)^{\frac{3}{2}}]}{(0{,}7874)\,[(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}]},$$

d'où l'on formera le tableau suivant, relatif aux diverses valeurs de Q' d'après celles de n supposées données :

$n=0$ . . . . . $Q'=(1{,}0290)\,Q$;
$n=0{,}25$ . . . $Q'=(1{,}0080)\,Q$;
$n=0{,}50$ . . . $Q'=(1{,}0031)\,Q$;
$n=1$ . . . . . $Q'=(1{,}0019)\,Q$.

Ces résultats montrent la différence qui existe entre les dépenses données par la formule ordinaire *(M)* et celles données par la formule *(N)*, et servent en même temps à faire voir dans quels cas cette différence peut être négligée sans erreur sensible. Ces mêmes résultats ont également lieu pour des orifices rectangulaires, en supposant que l'on ait $\alpha=\alpha'$, $\lambda=\lambda'$, et que la section de la veine contractée soit

un rectangle dont les côtés sont proportionnels à ceux de l'orifice donné.

40. La différence entre Q' et Q devient beaucoup plus considérable, lorsque la contraction ne se fait que sur quelques côtés de l'orifice. Considérons l'écoulement des expériences rapportées au n.° 24, où la contraction n'avait pas lieu sur le côté inférieur de l'orifice. On a ici $\mu=0,6389$, $\alpha'=0$, et en supposant $\alpha=\lambda=\lambda'$, on aura, pour déterminer α, l'équation $2\alpha^2-3\alpha+0,3611=0$, d'où l'on tire $\alpha=0,1320$, et l'équation *(R)* devient

$$Q'=Q.\frac{\left[(n+1)^{\frac{3}{2}}-(n+0,1320)^{\frac{3}{2}}\right]}{(0,8680)\left[(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}\right]};$$

et l'on aura les valeurs suivantes de Q',

$$n=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; Q'=(1,0967)\,Q;$$
$$n=0,25 \;.\;.\;.\; Q'=(1,0515)\,Q;$$
$$n=0,50 \;.\;.\;.\; Q'=(1,0362)\,Q;$$
$$n=1 \;.\;.\;.\;.\;.\; Q'=(1,0232)\,Q.$$

L'excès de Q' sur Q devient encore plus grand pour le cas des expériences du n.° 28, où la contraction n'avait lieu que sur le côté supérieur de l'orifice. On a dans ce cas $\alpha'=\lambda=\lambda'=0$; $\mu=0,6943$, d'où l'on déduit $\alpha=0,3057$, et l'équation (*R*) devient

$$Q'=Q.\frac{\left[(n+1)^{\frac{3}{2}}-(n+0,3057)^{\frac{3}{2}}\right]}{(0,6943)\left[(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}\right]},$$

et l'on formera le tableau suivant,

$n=0$ . . . . . $Q'=(1,1971)\,Q$;
$n=0,25$ . . . $Q'=(1,1129)\,Q$;
$n=0,50$ . . . $Q'=(1,0814)\,Q$;
$n=1$ . . . . . $Q'=(1,0528)\,Q$;
$n=2$ . . . . . $Q'=(1,0306)\,Q$.

On voit par là combien est considérable dans ce cas la différence entre les dépenses Q' et Q.

Considérons enfin le cas où $\alpha=0=\lambda=\lambda'$; on aura, (n.° 30 et 32), $1-\alpha'=0,6943$, partant $\alpha'=0,3057$ et l'équation (R) donnera

$$Q'=Q\,\frac{\left[(n+0,6943)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}\right]}{(0,6943)\left[(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}\right]}\;;$$

d'où l'on déduit les valeurs suivantes de Q' ;

$n=0$ . . . . . $Q'=(0,8332)\,Q$;
$n=0,25$ . . . $Q'=(0,8972)\,Q$;
$n=0,50$ . . . $Q'=(0,9237)\,Q$;
$n=1$ . . . . . $Q'=(0,9494)\,Q$;
$n=2$ . . . . . $Q'=(0,9696)\,Q$.

Ainsi dans ce cas la formule *(M)* donne des dépenses considérablement plus grandes que celles données par la formule *(N)*, et il est facile de s'assurer qu'il y a d'autres cas, où Q est plus grand que Q'.

41. Les différences rapportées dans le n.° précédent entre

les dépenses Q' et Q ont été calculées en faisant usage des valeurs de μ obtenues par les expériences du §.^e III. Mais on doit remarquer que ces différences sont plus grandes, si l'on suppose que la valeur de μ est toujours 0,62, soit que la contraction se fasse sur tous les côtés de l'orifice, soit qu'elle ait lieu seulement pour quelques uns d'eux. En effet en prenant $\mu=0,62$ et supposant que la contraction ne se fasse que sur le côté horizontal supérieur de l'orifice on aura $\alpha'=\lambda=\lambda'=0$, $\alpha=0,38$ et l'équation (R) deviendra

$$Q'=Q\frac{[(n+1)^{\frac{3}{2}}-(n+0,38)^{\frac{3}{2}}]}{(0,62)[(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}]},$$

et l'on aura

$$n=0 \;\ldots\ldots\; Q'=(1,2351)\,Q;$$
$$n=0,5 \;\ldots\ldots\; Q'=(1,0998)\,Q;$$
$$n=1 \;\ldots\ldots\; Q'=(1,0650)\,Q;$$

d'où l'on voit que les différences entre Q' et Q, calculées d'après la supposition de $\mu=0,62$, sont plus grandes que celles données dans le n.° précédent, relatives au même cas, calculées d'après la valeur de $\mu=0,6943$.

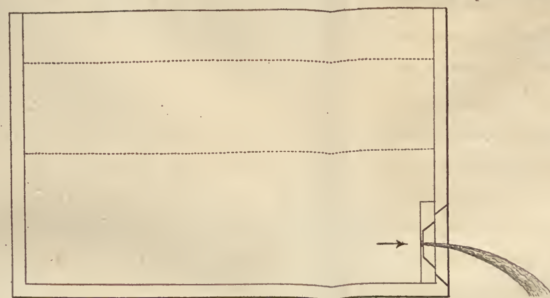
42. Les résultats numériques que nous venons de donner dans ce paragraphe, ne doivent toutefois être regardés que comme des simples approximations, soit à cause de l'hypothèse que nous avons adoptée, relative à une égale con-

traction de la veine dans tous les sens, soit parceque la formule *(N)* elle-même n'est qu'approchée ; car elle a été déduite dans la supposition que la section de la veine contractée a ses côtés parallèles à ceux de l'orifice, et que la figure de cette section ne présente d'autres changemens par rapport à celle de l'orifice que celui d'avoir ses côtés plus courts. Or cette supposition peut fort-bien s'accorder avec la réalité lorsque l'orifice est circulaire ; mais elle n'est pas tout-à-fait exacte pour les autres orifices, pour lesquels a lieu le phénomène connu *de l'inversion de la figure.* En vertu de cette inversion les sections de la veine faites à diverses distances de l'orifice sont différentes entr'elles soit par rapport à leur figure, soit par rapport à la longueur et à la position de leurs côtés.

Ainsi pour avoir une formule précise de la dépense d'un orifice vertical, dont la charge d'eau est petite en comparaison de sa hauteur, il faudrait connaître la vraie figure de la section contractée, savoir la longueur, la forme et la position de ses côtés. Mais dans l'ignorance où nous sommes de ces élémens, il nous semble que ce que l'on vient de remarquer dans ce paragraphe, suffit pour faire voir que la formule ordinaire de la dépense des orifices verticaux, dont la charge d'eau est petite par rapport à leur hauteur, n'est pas exacte en elle-même, et que l'application de cette formule à l'écoulement de ces orifices, est sans doute une des causes, par lesquelles les dépenses

expérimentales de ces mêmes orifices, et les dépenses calculées n'ont pas entr'elles cette conformité que l'on trouve, lorsque la charge d'eau est très-grande par rapport à la hauteur de l'orifice.

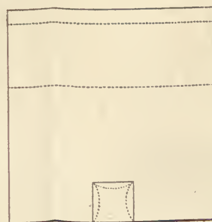
1.



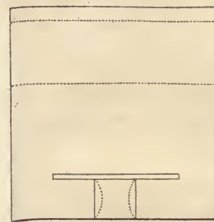
2.



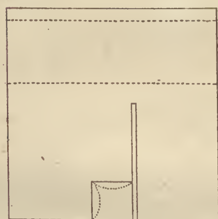
3.



4.



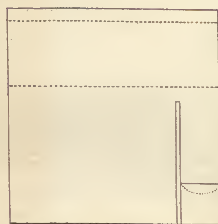
5.



6.



7.



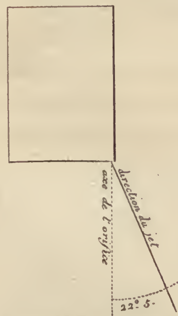
8.



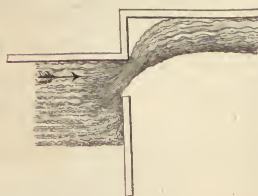
9.



10.



11.



12.

